

· 基础学科 ·

基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子

马欢, 贺龙雨, 候婷, 秦克云*

(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘要: 利用模糊 β -邻域和模糊逻辑算子, 提出两种基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙集模型; 研究了模型中上、下近似算子的基本性质; 对比分析这两对广义模糊粗糙近似算子与其他模糊粗糙近似算子之间的关系, 刻画了相关近似算子等价的条件。

关键词: 模糊粗糙近似算子; 模糊 β -覆盖; 模糊 β -邻域; 模糊逻辑算子

中图分类号: O29; TP18 文献标志码: A 文章编号: 1673-159X(2022)05-0091-13

doi:10.12198/j.issn.1673-159X.4392

Fuzzy β -Covering Based (I, T) -Fuzzy Rough Approximation Operators

MA Huan, HE Longyu, HOU Ting, QIN Keyun*

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756 China)

Abstract: In this paper, by using fuzzy β -neighborhood and fuzzy logic operators, two (I, T) -fuzzy rough set models were proposed with the help of fuzzy β -covering. The basic properties of upper and lower approximation operators in the models were studied. Then, the relationships between these two pairs of generalized fuzzy rough approximation operators and other fuzzy rough approximation operators were compared and analyzed. Finally, the equivalent conditions for approximation operators coincide with each other were described.

Keywords: fuzzy rough approximation operators; fuzzy β -covering; fuzzy β -neighborhood; fuzzy logic operators

粗糙集理论(rough set theory, RST)是由波兰学者 Pawlak^[1]在 1982 年创立的, 是一种处理不确定性、不完整信息的数学方法。该理论通过使用两个可定义的子集(称为上近似和下近似)来近似地描述不确定性概念。目前, 这一理论已成功应

用于数据分析与知识发现、模糊识别与分类、粒计算、不确定性决策等领域^[2-5]。

在 Pawlak 粗糙集模型中, 对象之间的相似性通过等价关系表示, 所有的等价类构成论域上的一个划分。然而, 一些实际问题中所讨论的关系并不

收稿日期: 2022-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61976130, 61473239)。

第一作者: 马欢(1998—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为粗糙集理论等。

ORCID: 0000-0001-8976-2201 E-mail: 2715627099@qq.com

* 通信作者: 秦克云(1962—), 男, 教授, 博士, 博士研究生导师, 主要研究方向为粗糙集理论、形式概念分析等。

ORCID: 0000-0003-3169-487X E-mail: keyunqin@263.net

引用格式: 马欢, 贺龙雨, 候婷, 等. 基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2022, 41(5): 91-103.

MA Huan, HE Longyu, HOU Ting, et al. Fuzzy β -Covering Based (I, T) -Fuzzy Rough Approximation Operators[J]. Journal of Xihua University(Natural Science Edition), 2022, 41(5): 91-103.

一定满足等价条件严格的标准。为此,学者们从实际应用背景出发,用一般二元关系^[6-7]替换等价关系,将划分推广为邻域系统^[8-9]和覆盖^[10-11]等,提出了多种粗糙集的扩展模型。基于论域上的覆盖,Pomykala^[12]得到了两对对偶的近似算子。Yao^[9,13]通过邻域和知识粒,进一步研究了这些近似算子。该领域还有许多研究^[14-16]被报道。

另外,经典的RST在处理定量数据时也遇到了很大的限制。为了克服这一限制,Dubois等^[17]将模糊集^[18]与粗糙集结合,提出了模糊粗糙集和粗糙模糊集的扩展概念。后来,一些学者将覆盖粗糙集扩展到基于模糊覆盖的粗糙集。例如,通过使用模糊逻辑算子,Li等^[19]提出了两对基于模糊覆盖的广义近似算子。此外,D'eer等^[20-21]研究了基于模糊邻域系统、模糊极小描述和模糊极大描述的各种模糊邻域算子。然而,模糊覆盖的定义仍然具有一定的局限性。基于此,Ma^[22]将模糊覆盖推广为模糊 β -覆盖,并通过模糊 β -邻域,提出了两种新的基于模糊覆盖的粗糙集模型。Yang等^[23]进一步发展了模糊极小描述和模糊互补 β -邻域,给出了另外3种基于模糊覆盖的粗糙集模型。在此基础上,Zhang等^[24]利用三角模和模糊蕴涵算子,对以上提出的基于模糊覆盖的模糊粗糙集模型进行了推广,并讨论了相关模型之间的关系。

值得注意的是,文献^[22-24]提出的模型中的近似算子都是广义近似空间中基于对象生成的广义粗糙近似算子的推广形式。而在广义近似空间中,可以分别从对象、知识粒、以及子系统的角度构造不同类型的广义粗糙近似算子,它们具有不同的语义解释。本文从知识粒的角度对广义粗糙近似算子做进一步的研究,并结合模糊 β -邻域和模糊逻辑算子,建立了两种新的基于模糊 β -覆盖的广义模糊粗糙集模型,可以看作是连接覆盖粗糙集理论和模糊粗糙集理论的桥梁,对以后研究基于覆盖的模糊粗糙集在决策中的应用有一定的帮助。文中主要讨论了所提出的模糊粗糙近似算子的性质,并与现有的模糊粗糙近似算子进行比较分析,使得新的模糊粗糙近似算子和现有的模糊粗糙近似算子之间建立联系,为进一步讨论模糊粗糙近似算子

的拓扑结构及其应用创造了条件。

1 预备知识

本节给出模糊逻辑算子、模糊集以及模糊 β -覆盖近似空间中的相关概念与性质。

1.1 模糊逻辑算子

称映射 $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为 t -模^[25],如果对于任意 $a, b, c, d \in [0, 1]$,有 $T(a, b) = T(b, a)$; $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$; $a \leq c, b \leq d \Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d)$; $T(1, a) = a$ 。

下面是一些常见的连续的 t -模:

- 1) 取小算子 $T_M(a, b) = a \wedge b$;
- 2) 代数积 $T_P(a, b) = a \cdot b$;
- 3) 有界积 $T_L(a, b) = 0 \vee (a + b - 1)$ 。

称映射 $\perp: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为 t -余模^[25],如果对于任意 $a, b, c, d \in [0, 1]$,有 $\perp(a, b) = \perp(b, a)$; $\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c))$; $a \leq c, b \leq d \Rightarrow \perp(a, b) \leq \perp(c, d)$; $\perp(a, 0) = a$ 。

下面是一些常见的连续的 t -余模:

- 1) 取大算子 $\perp_M(a, b) = a \vee b$;
- 2) 代数和 $\perp_P(a, b) = a + b - a \cdot b$;
- 3) 有界和 $\perp_L(a, b) = 1 \wedge (a + b)$ 。

称映射 $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为伪补^[25],如果对于任意 $a, b \in [0, 1]$,有 $a \leq b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$; $N(0) = 1$, $N(1) = 0$ 。

如果对于任意 $a \in [0, 1]$, $N(a) = 1 - a$,则称 N 为标准伪补,记为 N_S ;如果对于任意 $a \in [0, 1]$, $N(N(a)) = a$,则称 N 为对合伪补。

一个 t -模 T 和一个 t -余模 \perp 关于伪补 N 是对偶的当且仅当德摩根定律成立,即对于任意 $a, b \in [0, 1]$,

$$\perp(N(a), N(b)) = N(T(a, b))$$

$$T(N(a), N(b)) = N(\perp(a, b))$$

称映射 $I: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为模糊蕴涵算子^[26],如果对于任意 $a, b, c \in [0, 1]$,有 $a \leq b \Rightarrow I(a, c) \geq I(b, c)$; $b \leq c \Rightarrow I(a, b) \leq I(a, c)$; $I(0, 0) = 1$, $I(1, 1) = 1$, $I(1, 0) = 0$ 。

如果对于任意 $x \in [0, 1]$,函数 $N_I(x) = I(x, 0)$ 是一个伪补,则称该伪补是由 I 诱导产生的。

蕴涵算子 I 是基于 t -余模 \perp 和伪补 N 的一个 S -蕴涵算子^[26]当且仅当对于任意 $a, b \in [0, 1]$,有

$$I_{\perp, N}(a, b) = \perp(N(a), b)$$

蕴涵算子 I 是基于连续的 t -模 T 的一个 R -蕴涵算子^[26]当且仅当对于任意 $a, b \in [0, 1]$,有

$$I_T(a, b) = \sup\{\lambda \in [0, 1] : T(a, \lambda) \leq b\}$$

3 种主要的 S -蕴涵算子:

- 1) 有界蕴涵 $I_L(a, b) = 1 \wedge (1 - a + b)$, 基于 \perp_L 和 \mathcal{N}_S ;
- 2) Kleene-Dienes 蕴涵 $I_M(a, b) = (1 - a) \vee b$, 基于 \perp_M 和 \mathcal{N}_S ;
- 3) Kleene-Dienes-Lukasiewicz 蕴涵 $I_P(a, b) = 1 - a + a \cdot b$, 基于 \perp_P 和 \mathcal{N}_S 。

3 种常见的 R -蕴涵算子:

- 1) 有界蕴涵 $I_L(a, b) = 1 \wedge (1 - a + b)$, 基于 T_L ;
- 2) Godel 蕴涵 $I_G(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$, 基于 T_M ;
- 3) Gaines 蕴涵 $I_*(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ \frac{b}{a}, & a > b \end{cases}$, 基于 T_P 。

下面的引理 1 和 2 分别总结了 R -蕴涵算子和 S -蕴涵算子的基本性质^[27-28]。若无其他说明, 本文只考虑这两类蕴涵算子。

引理 1 设 T 是一个连续的 t -模, I 是基于 T 的一个 R -蕴涵算子, 且 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_I$ 。对于任意 $a, b, c \in [0, 1]$, $a_\lambda, b_\lambda \in [0, 1]$, 其中 $\lambda \in \Lambda$, Λ 为一指标集, 有:

- 1) $T(a, 0) = 0, T(a, b) \leq a$;
- 2) $T(b, \bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} T(b, a_\lambda), T(b, \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} T(b, a_\lambda)$;
- 3) $I(a, 1) = 1, I(0, a) = 1, I(1, a) = a$;
- 4) $a \leq b \Rightarrow I(a, c) \geq I(b, c), I(c, a) \leq I(c, b)$;
- 5) $T(a, I(a, b)) \leq b \leq I(a, T(a, b))$;
- 6) $T(a, b) \leq c \Leftrightarrow I(a, c) \geq b$;
- 7) $I(T(a, b), c) = I(a, I(b, c)), I(a, I(b, c)) = I(b, I(a, c))$;
- 8) $T(a, (I(b, c))) \leq I(I(a, b), c)$;
- 9) $a \leq b \Leftrightarrow I(a, b) = 1$;
- 10) $I(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda, b) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I(a_\lambda, b), I(b, \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I(b, a_\lambda)$;
- 11) $I(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda, b) \geq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} I(a_\lambda, b), I(b, \bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) \geq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} I(b, a_\lambda)$ 。

引理 2 设 T 是一个 t -模, \mathcal{N} 是一伪补。 I 是基于 T 和 \mathcal{N} 的一个 S -蕴涵算子, 则引理 1 中的 3)、4) 以及 7) 的第 2 个等式仍成立。

注意: 如果 I 是基于一个连续的 t -模 T 和一个伪补 \mathcal{N} 的一个 S -蕴涵算子, 则引理 1 中的 1)、2)、3)、4)、7) 的第 2 个等式、10) 以及 11) 成立。

1.2 模糊集

设 U 是非空论域, 称映射 $A: U \rightarrow [0, 1]$ 为 U 上的

模糊集。设 $F(U)$ 是 U 的所有模糊集构成的集合, 称其为 U 的模糊幂集^[26]。

设 $A, B \in F(U)$ 。如果对于任意 $x \in U$, 都有 $A(x) \leq B(x)$, 则称 A 包含于 B , 记 $A \subseteq B$; $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。 A 与 B 的并, $A \cup B \in F(U)$ 且对于任意 $x \in U$, 有 $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$; 同样地, A 与 B 的交, $A \cap B \in F(U)$ 且对于任意 $x \in U$, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$ 。符号 co_N 表示模糊补, 即对于任意 $x \in U$, $(co_N A)(x) = \mathcal{N}(A(x))$ 。

1.3 模糊 β -覆盖近似空间

定义 1^[22] 设 U 是非空论域, $C_1, C_2, \dots, C_n \in F(U)$, $\beta \in [0, 1]$ 。如果对于任意 $x \in U$, $(\bigcup_{i=1}^n C_i)(x) \geq \beta$, 则称 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是 U 的一个模糊 β -覆盖, 并称 (U, C) 是一个模糊 β -覆盖近似空间。

定义 2^[22] 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x \in U$, x 的模糊 β -邻域为

$$N_x^\beta = \bigcap \{C_i \in C \mid C_i(x) \geq \beta\} \quad (1)$$

命题 1^[22] 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。则:

- 1) 对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) \geq \beta$;
- 2) 对于任意 $x, y, z \in U$, 如果 $N_x^\beta(y) \geq \beta$ 且 $N_y^\beta(z) \geq \beta$, 则 $N_x^\beta(z) \geq \beta$;
- 3) 对于任意 $x \in U$, 如果 $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta$, 则 $N_x^{\beta_1} \subseteq N_x^{\beta_2}$ 。

定义 3^[22] 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x \in U$, x 的 β -邻域为

$$\overline{N}_x^\beta = \{y \in U \mid N_x^\beta(y) \geq \beta\} \quad (2)$$

定义 4^[23] 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x \in U$, x 的模糊互补 β -邻域为 M_x^β , 满足对于任意 $y \in U, M_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 。

2 两种基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙集模型的建立

本节回顾广义近似空间中上下近似算子的定义, 并给出两对基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子。

定义 5^[29] 设 U 是非空有限论域, R 是 U 上的一个二元关系, 即 $R \subseteq U \times U$, 则称二元组 (U, R) 是一个广义近似空间。对于任意 $X \subseteq U$, X 关于近似空间 (U, R) 的两种形式的下近似与上近似分别定义为:

基于对象:

$$R(X) = \{x \in U | R_S(x) \subseteq X\} \quad (3)$$

$$\bar{R}(X) = \{x \in U | R_S(x) \cap X \neq \emptyset\} \quad (4)$$

基于知识粒:

$$\underline{apr}(X) = \cup\{R_S(x) | R_S(x) \subseteq X\} \quad (5)$$

$$\overline{apr}(X) = \cup\{R_S(x) | R_S(x) \cap X \neq \emptyset\} \quad (6)$$

其中 $R_S(x) = \{y \in U | (x, y) \in R\}$, 称为 x 关于 R 的右邻域。

已有文献通过模糊 β -邻域、模糊互补 β -邻域以及模糊逻辑算子, 对式(3)和(4)进行了推广。如下定义:

定义 6^[24] 设 T 和 I 分别是 $[0, 1]$ 上的 t -模和蕴涵算子, (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $X \in F(U)$, X 关于近似空间 (U, C) 的两种形式的下近似 $\underline{FL}(X)$ 与上近似 $\overline{FU}(X)$ 是如下定义的 U 上的模糊集, 对于任意 $x \in U$,

$$\underline{FL}_1(X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), X(y))$$

$$\overline{FU}_1(X)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), X(y))$$

$$\underline{FL}_2(X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I(M_x^\beta(y), X(y))$$

$$\overline{FU}_2(X)(x) = \bigvee_{y \in U} T(M_x^\beta(y), X(y))$$

如果 $\underline{FL}(X) \neq \overline{FU}(X)$, 则称 X 是基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙集。

同样地, 对于式(5)和(6), 我们可提出下面的定义:

定义 7 设 T 和 I 分别是 $[0, 1]$ 上的 t -模和蕴涵算子, (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $X \in F(U)$, X 关于近似空间 (U, C) 的两种形式的下近似 $\underline{SL}(X)$ 与上近似 $\overline{SU}(X)$ 是如下定义的 U 上的模糊集: 对于任意 $x \in U$,

$$\underline{SL}_1(X)(x) = \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z))\right)$$

$$\overline{SU}_1(X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z))\right)$$

$$\underline{SL}_2(X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z))\right)$$

$$\overline{SU}_2(X)(x) = \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z))\right)$$

如果 $\underline{SL}(X) \neq \overline{SU}(X)$, 则称 X 是基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙集。

对于定义 7 的提出, 我们可作出以下分析: 由式(5)和(6), 有

$$x \in \underline{apr}(X)$$

\Leftrightarrow 存在 $y \in U$, 使得 $R_S(y) \subseteq X$ 且 $x \in R_S(y)$ 。

\Leftrightarrow 存在 $y \in U$, 使得 $R(y, x) = 1$ 且对于任意 $z \in U$, $R(y, z) = 1 \rightarrow X_X(z) = 1$ 。

$$\Leftrightarrow \bigvee_{y \in U} (R(y, x) \wedge (\bigwedge_{z \in U} ((1 - R(y, z)) \vee X_X(z)))) = 1。$$

$$x \in \overline{apr}(X)$$

\Leftrightarrow 存在 $y \in U$, 使得 $R_S(y) \cap X \neq \emptyset$ 且 $x \in R_S(y)$ 。

\Leftrightarrow 存在 $y \in U$, 使得 $R(y, x) = 1$ 且存在 $z \in U$, $R(y, z) = 1$ 且 $X_X(z) = 1$ 。

$$\Leftrightarrow \bigvee_{y \in U} (R(y, x) \wedge (\bigvee_{z \in U} (R(y, z) \wedge X_X(z)))) = 1。$$

其中 X_X 为集合 X 的特征函数。将模糊 β -邻域替换以上相应的二元关系, 结合模糊逻辑算子, 从对偶性角度出发即可得到定义 7 中所提出的模糊粗糙近似算子。

3 基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子的性质

本节主要讨论两对基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子的性质。

3.1 基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子 $(\underline{SL}_1, \overline{SU}_1)$ 的性质

命题 2 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $X, Y \in F(U)$, $(\underline{SL}_1, \overline{SU}_1)$ 满足以下基本性质。

1) $\underline{SL}_1(U) = U$ 当且仅当对于任意 $x \in U$, $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$; 如果 T 是连续的, 则 $\overline{SU}_1(\emptyset) = \emptyset$ 当且仅当对于任意 $x \in U$, $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$ 。

2) 如果 $X \subseteq Y$, 则 $\underline{SL}_1(X) \subseteq \underline{SL}_1(Y)$, $\overline{SU}_1(X) \subseteq \overline{SU}_1(Y)$ 。

$$3) \underline{SL}_1(X \cap Y) \subseteq \underline{SL}_1(X) \cap \underline{SL}_1(Y),$$

$$\overline{SU}_1(X \cup Y) \supseteq \overline{SU}_1(X) \cup \overline{SU}_1(Y);$$

$$\underline{SL}_1(X \cup Y) \supseteq \underline{SL}_1(X) \cup \underline{SL}_1(Y),$$

$$\overline{SU}_1(X \cap Y) \subseteq \overline{SU}_1(X) \cap \overline{SU}_1(Y)。$$

4) 如果对于任意 $x \in U$, $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 则 $\underline{SL}_1(\hat{\alpha}) = \overline{SU}_1(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ 。(其中 $\hat{\alpha}$ 是常值模糊集, 即对于任意 $\alpha \in [0, 1]$, $\hat{\alpha}(x) = \alpha$ 。)

5) 当 I 是 R -蕴涵算子时, $\underline{SL}_1(X) \subseteq X \subseteq \overline{SU}_1(X)$ 。

6) 当 I 是 R -蕴涵算子时, $\underline{SL}_1(\underline{SL}_1(X)) = \underline{SL}_1(X)$, $\overline{SU}_1(\overline{SU}_1(X)) = \overline{SU}_1(X)$ 。

证明 1)、2) 和 3) 直接可证得。下面我们只给出 4)、5) 和 6) 的证明。

4) 由式(2)可知, 如果对于任意 $x \in U$, x 的 1-邻域 $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 即对于任意 $x \in U$, $C_i(x) \geq \beta (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, 存在 $u \in U$, 使得 $C_i(u) = 1$, 则 $N_x^\beta(u) = \bigwedge_{C_i(x) \geq \beta} C_i(u) = 1$ 。由引理 1 的 3) 及引理 2 有

$$\begin{aligned} \underline{SL}_1(\hat{\alpha})(x) &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), \hat{\alpha}(z)) \right) = \\ &= \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), I(1, \alpha)) = T(1, \alpha) = \alpha \\ \overline{SU}_1(\hat{\alpha})(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), \hat{\alpha}(z)) \right) = \\ &= \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), T(1, \alpha)) = I(1, \alpha) = \alpha \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_1(\hat{\alpha}) = \overline{SU}_1(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ 。

5) I 是 R -蕴涵算子, 则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 5) 可知

$$\begin{aligned} \underline{SL}_1(X)(x) &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \leq \\ &= \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), I(N_x^\beta(y), X(x))) = X(x) \\ \overline{SU}_1(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \geq \\ &= \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), T(N_x^\beta(y), X(x))) = X(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_1(X) \subseteq X \subseteq \overline{SU}_1(X)$ 。

6) I 是 R -蕴涵算子, 则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 5) 有

$$\begin{aligned} \underline{SL}_1(\underline{SL}_1(X))(x) &= \\ &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), \bigvee_{u \in U} T \left(N_z^\beta(u), \bigwedge_{v \in U} I(N_v^\beta(u), X(v)) \right) \right) \right) \geq \\ &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), T \left(N_z^\beta(z), \bigwedge_{v \in U} I(N_v^\beta(y), X(v)) \right) \right) \right) \geq \\ &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) = \\ &= \underline{SL}_1(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_1(\underline{SL}_1(X)) \supseteq \underline{SL}_1(X)$ 。

另一方面, 由命题 2 的 5) 可知 $\underline{SL}_1(X) \subseteq X$ 。又由命题 2 的 2), 从而有 $\underline{SL}_1(\underline{SL}_1(X)) \subseteq \underline{SL}_1(X)$ 。

同理可证得 $\overline{SU}_1(\overline{SU}_1(X)) = \overline{SU}_1(X)$ 。

此外, $(\underline{SL}_1, \overline{SU}_1)$ 还有下面的性质。

命题 3 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 $I = I_M, T = T_M$ 时, 如果对于任意 $x \in U, \overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 则对于任意 $X \in F(U), \alpha \in [0, 1], \underline{SL}_1(X \cup \hat{\alpha}) = \underline{SL}_1(X) \cup \hat{\alpha}, \overline{SU}_1(X \cap \hat{\alpha}) = \overline{SU}_1(X) \cap \hat{\alpha}$ 。

证明 如果对于任意 $x \in U, \overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 则由文献 [23] 的命题 4.5 有

$$\begin{aligned} \underline{SL}_1(X \cup \hat{\alpha})(x) &= \\ &= \bigvee_{y \in U} \left(N_x^\beta(y) \wedge \left(\bigwedge_{z \in U} \left((1 - N_z^\beta(y)) \vee (X \cup \hat{\alpha})(z) \right) \right) \right) = \\ &= \bigvee_{y \in U} \left(N_x^\beta(y) \wedge \left(\bigwedge_{z \in U} \left((1 - N_z^\beta(y)) \vee X(z) \vee \alpha \right) \right) \right) = \\ &= \left(\bigvee_{y \in U} \left(N_x^\beta(y) \wedge \left(\bigwedge_{z \in U} (1 - N_z^\beta(y)) \vee X(z) \right) \right) \right) \vee \\ &= \left(\bigvee_{y \in U} (N_x^\beta(y) \wedge \alpha) \right) = \\ &= \underline{SL}_1(X)(x) \vee \alpha = (\underline{SL}_1(X) \cup \hat{\alpha})(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_1(X \cup \hat{\alpha}) = \underline{SL}_1(X) \cup \hat{\alpha}$ 。

同理可证得 $\overline{SU}_1(X \cap \hat{\alpha}) = \overline{SU}_1(X) \cap \hat{\alpha}$ 。

下面的命题讨论 $(\underline{SL}_1, \overline{SU}_1)$ 的对偶性。

命题 4 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。

1) 如果 I 是基于 t -模 T 和对合伪补 \mathcal{N} 的一个 S -蕴涵算子, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{SL}_1(X) = co_N \overline{SU}_1(co_N X), \overline{SU}_1(X) = co_N \underline{SL}_1(co_N X)$ 。

2) 如果 I 是基于连续的 t -模 T 的一个 R -蕴涵算子, \mathcal{N} 是由 I 诱导的伪补, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{SL}_1(co_N X) \subseteq co_N \overline{SU}_1(X), \overline{SU}_1(co_N X) \subseteq co_N \underline{SL}_1(X)$ 。

证明

1) 因为 $\mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = a$, 且 T 和 \perp 关于伪补 \mathcal{N} 是对偶的, 则对于任意 $a, b \in [0, 1], \mathcal{N}(I(a, b)) = T(a, \mathcal{N}(b))$ 。故对于任意 $x \in U$, 有

$$\begin{aligned} co_N \overline{SU}_1(co_N X)(x) &= \\ &= \mathcal{N} \left(\bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), \mathcal{N}(X)(z)) \right) \right) = \\ &= \mathcal{N} \left(\bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} \mathcal{N}(I(N_z^\beta(y), X(z))) \right) \right) \geq \\ &= \bigvee_{y \in U} \mathcal{N} \left(I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} \mathcal{N}(I(N_z^\beta(y), X(z))) \right) \right) \geq \\ &= \bigvee_{y \in U} \mathcal{N} \left(I \left(N_x^\beta(y), \mathcal{N} \left(\bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \right) \right) = \\ &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z)) \right) = \underline{SL}_1(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_1(X) \subseteq co_N \overline{SU}_1(co_N X)$ 。

另一方面, 对于任意 $x \in U$, 有

$$\begin{aligned} & \text{co}_N \overline{S U_1}(\text{co}_N X)(x) = \\ & \mathcal{N} \left(\bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \mathcal{N}(X)(z) \right) \right) \right) = \\ & \mathcal{N} \left(\bigwedge_{y \in U} \mathcal{N} \left(T \left(N_x^\beta(y), \mathcal{N} \left(\bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \mathcal{N}(X)(z) \right) \right) \right) \right) \right) \leq \\ & \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \mathcal{N} \left(\bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \mathcal{N}(X)(z) \right) \right) \right) \leq \\ & \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} \mathcal{N} \left(T \left(N_z^\beta(y), \mathcal{N}(X)(z) \right) \right) \right) = \\ & \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) = \underline{S L_1}(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{S L_1}(X) \supseteq \text{co}_N \overline{S U_1}(\text{co}_N X)$ 。

类似可证得 $\overline{S U_1}(X) = \text{co}_N \underline{S L_1}(\text{co}_N X)$ 。

2) 因为对于任意 $a \in [0, 1]$, $\mathcal{N}_I(a) = I(a, 0)$ 。则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 7)、8)、10) 以及 11) 可得,

$$\begin{aligned} & \overline{S U_1}(\text{co}_N X)(x) = \\ & \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), I(X(z), 0) \right) \right) \leq \\ & \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} I \left(I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right), 0 \right) \right) \leq \\ & \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), I \left(\bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right), 0 \right) \right) = \\ & I \left(\bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right), 0 \right) = \\ & \mathcal{N} \left(\bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) \right) = \\ & \mathcal{N}(\underline{S L_1}(X)(x)) = \text{co}_N \underline{S L_1}(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\overline{S U_1}(\text{co}_N X) \subseteq \text{co}_N \underline{S L_1}(X)$ 。

类似可证得 $\underline{S L_1}(\text{co}_N X) \subseteq \text{co}_N \overline{S U_1}(X)$ 。

对于一些特殊集合的上、下近似, 讨论如下所示。

命题 5 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x, y \in U, X \in F(U)$, 下列表述成立。

- 1) 如果 T 是连续的, 则 $\overline{S U_1}(1_y)(x) = \bigwedge_{z \in U} I(N_x^\beta(z), N_y^\beta(z))$;
- 2) $\underline{S L_1}(1_{U-\{y\}})(x) = \bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), I(N_y^\beta(z), 0))$;
- 3) 如果 T 是连续的, 则 $\overline{S U_1}(1_X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in X} N_z^\beta(y))$;
- 4) $\underline{S L_1}(1_X)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \notin X} I(N_z^\beta(y), 0))$ 。(其中 1_y 是模糊单点集, 即对于任意 $x, y \in U, 1_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$; 1_X 是 X 的特征函数。)

证明: 1) 对于任意 $x, y \in U$, 由 1_y 的定义可知, $1_y(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq y$ 。又因为 T 是连续的, 则由引理 1 的 1) 有 **证明 1)** 类似命题 4 的 1) 的证明。

$$\begin{aligned} & \overline{S U_1}(1_y)(x) = \bigwedge_{z \in U} I \left(N_x^\beta(z), \bigvee_{u \in U} T \left(N_u^\beta(z), 1_y(u) \right) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} I \left(N_x^\beta(z), \left(\bigvee_{u \in U-\{y\}} T \left(N_u^\beta(z), 1_y(u) \right) \vee T \left(N_y^\beta(z), 1_y(y) \right) \right) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} I \left(N_x^\beta(z), T \left(N_y^\beta(z), 1 \right) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} I \left(N_x^\beta(z), N_y^\beta(z) \right) \end{aligned}$$

同理可得 2)、3) 和 4)。

命题 6 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。如果对于任意 $x, y \in U, N_x^\beta(y) \geq \beta$ 且 $N_y^\beta(x) \geq \beta$ 或 $N_x^\beta = N_y^\beta$, 则 $\overline{S U_1}(1_y)(x) = \overline{S U_1}(1_x)(y)$ 且 $\underline{S L_1}(1_{U-\{y\}})(x) = \underline{S L_1}(1_{U-\{x\}})(y)$ 。

证明 由定义 2 可知, $N_x^\beta(y) = \bigwedge_{C_i(x) \geq \beta} C_i(y) \geq \beta$, 则有 $\{C_i \in C | C_i(x) \geq \beta\} \subseteq \{C_i \in C | C_i(y) \geq \beta\}$ 。因此, 对于任意 $z \in U$, 有 $N_y^\beta(z) = \bigwedge_{C_i(y) \geq \beta} C_i(z) \leq \bigwedge_{C_i(x) \geq \beta} C_i(z) = N_x^\beta(z)$, 即 $N_y^\beta \subseteq N_x^\beta$ 。所以对于任意 $x, y \in U, N_x^\beta(y) \geq \beta$ 且 $N_y^\beta(x) \geq \beta$ 当且仅当 $N_x^\beta = N_y^\beta$ 。

又由命题 5 可知, 结论显然成立。

3.2 基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子 $(\underline{S L_2}, \overline{S U_2})$ 的性质

定理 1 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 对于任意 $x, z \in U$, 设

$$/N_x^\beta(z) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y)) \quad (7)$$

为一个 T -模糊 β -邻域, 满足 $N_x^\beta(z) = N_z^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$ 。则对于任意 $X \in F(U), \underline{S L_1}(X) = \underline{F L_1}(X), \overline{S U_2}(X) = \overline{F U_1}(X)$ 。

证明 I 是 R -蕴涵算子, 则对于任意 $X \in F(U), x, z \in U$, 由引理 1 的 7) 和 10) 可知

$$\begin{aligned} & \underline{S L_2}(X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} \bigwedge_{y \in U} I \left(T \left(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y) \right), X(z) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} I \left(\bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y) \right), X(z) \right) = \\ & \bigwedge_{z \in U} I \left(/N_x^\beta(z), X(z) \right) = \underline{F L_1}(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{SL}_2(X) = \underline{FL}_1(X)$ 。

类似可证得 $\overline{SU}_2(X) = \overline{FU}_1(X)$ 。

推论 1 定理 1 表明了基于知识粒生成的 (I, T) 模糊 β -覆盖粗糙近似算子 $(\underline{SL}_2, \overline{SU}_2)$ 实质上也是一种基于对象生成的 (I, T) 模糊 β -覆盖粗糙近似算子 $(\underline{FL}, \overline{FU})$ 的推广形式。

命题 7 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $X, Y \in F(U)$, $(\underline{SL}_2, \overline{SU}_2)$ 满足下列基本性质。

1) $\underline{SL}_2(U) = U$; 如果 T 是连续的, 则 $\overline{SU}_2(\emptyset) = \emptyset$ 。

2) 如果 $X \subseteq Y$, 则 $\underline{SL}_2(X) \subseteq \underline{SL}_2(Y)$, $\overline{SU}_2(X) \subseteq \overline{SU}_2(Y)$ 。

3) $\underline{SL}_2(X \cap Y) = \underline{SL}_2(X) \cap \underline{SL}_2(Y)$,

$\overline{SU}_2(X \cup Y) = \overline{SU}_2(X) \cup \overline{SU}_2(Y)$;

$\underline{SL}_2(X \cup Y) \supseteq \underline{SL}_2(X) \cup \underline{SL}_2(Y)$,

$\overline{SU}_2(X \cap Y) \subseteq \overline{SU}_2(X) \cap \overline{SU}_2(Y)$ 。

4) 对于任意 $(X_j)_{j \in J} \subseteq F(U)$, 如果 T 是连续的,

则 $\underline{SL}_2(\bigcap_{j \in J} X_j) = \bigcap_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)$, $\underline{SL}_2(\bigcup_{j \in J} X_j) \supseteq \bigcup_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)$;

$\overline{SU}_2(\bigcup_{j \in J} X_j) = \bigcup_{j \in J} \overline{SU}_2(X_j)$, $\overline{SU}_2(\bigcap_{j \in J} X_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} \overline{SU}_2(X_j)$ 。

5) 如果对于任意 $x \in U$, $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 则对于任意 $\alpha \in [0, 1]$, $\underline{SL}_2(\hat{\alpha}) = \overline{SU}_2(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ 。

6) 如果对于任意 $x \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, 则 $\underline{SL}_2(X) \subseteq X \subseteq \overline{SU}_2(X)$ 。

7) 当 I 是 R -蕴涵算子时, $\overline{SU}_2(\underline{SL}_2(X)) \subseteq X \subseteq \underline{SL}_2(\overline{SU}_2(X))$ 。

8) 如果 $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta$, 则 $\underline{SL}_2^{\beta_1}(X) \supseteq \underline{SL}_2^{\beta_2}(X)$, $\overline{SU}_2^{\beta_1}(X) \subseteq \overline{SU}_2^{\beta_2}(X)$ 。

证明 1)、2)、3)、5) 和 8) 直接可证得。下面我们只给出 4)、6) 和 7) 的证明。

4) 如果 T 是连续的, 则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 10)、11) 及引理 2 可得,

$$\begin{aligned} \underline{SL}_2\left(\bigcap_{j \in J} X_j\right)(x) &= \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), \left(\bigcap_{j \in J} X_j\right)(z)\right)\right) &= \\ \bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), X_j(z)\right)\right) &= \\ \bigwedge_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)(x) &= \left(\bigcap_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)\right)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{SL}_2\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)(x) &= \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), \left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)(z)\right)\right) &\geq \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} \bigvee_{j \in J} I\left(N_z^\beta(y), X_j(z)\right)\right) &\geq \\ \bigwedge_{y \in U} \bigvee_{j \in J} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), X_j(z)\right)\right) &\geq \\ \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), X_j(z)\right)\right) &= \\ \bigvee_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)(x) &= \left(\bigcup_{j \in J} \underline{SL}_2(X_j)\right)(x) \end{aligned}$$

同理可证得另外两式。

6) 如果对于任意 $x \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$ 。则由引理 1 的 3) 及引理 2 有

$$\begin{aligned} \underline{SL}_2(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), X(z)\right)\right) \leq \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), I\left(N_x^\beta(y), X(x)\right)\right) &\leq \\ I\left(N_x^\beta(x), I\left(N_x^\beta(x), X(x)\right)\right) &= \\ I(1, I(1, X(x))) &= X(x) \\ \overline{SU}_2(X)(x) &= \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T\left(N_z^\beta(y), X(z)\right)\right) \geq \\ \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), T\left(N_x^\beta(y), X(x)\right)\right) &\geq \\ T\left(N_x^\beta(x), T\left(N_x^\beta(x), X(x)\right)\right) &= \\ T(1, T(1, X(x))) &= X(x) \end{aligned}$$

即对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) \subseteq X \subseteq \overline{SU}_2(X)$ 。

7) I 是 R -蕴涵算子, 则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 5) 可知

$$\begin{aligned} \overline{SU}_2(\underline{SL}_2(X))(x) &= \\ \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T\left(N_z^\beta(y), \bigwedge_{u \in U} I\left(N_z^\beta(u), \right.\right.\right. & \\ \left.\left.\left. \bigwedge_{v \in U} I\left(N_v^\beta(u), X(v)\right)\right)\right)\right) &\leq \\ \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T\left(N_z^\beta(y), I\left(N_z^\beta(y), \right.\right.\right. & \\ \left.\left.\left. X(v)\right)\right)\right) &\leq \\ \bigwedge_{v \in U} I\left(N_v^\beta(y), \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{v \in U} I\left(N_v^\beta(y), X(v)\right)\right)\right) &\leq \\ \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), I\left(N_x^\beta(y), X(x)\right)\right) &\leq X(x) \\ \underline{SL}_2(\overline{SU}_2(X))(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \\ \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), \bigvee_{u \in U} T\left(N_z^\beta(u), \bigvee_{v \in U} T\left(N_v^\beta(u), X(v)\right)\right)\right)\right) &\geq \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I\left(N_z^\beta(y), T\left(N_z^\beta(y), \bigvee_{v \in U} T\left(N_v^\beta(y), X(v)\right)\right)\right)\right) &\geq \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{v \in U} T\left(N_v^\beta(y), X(v)\right)\right) &\geq \\ \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), T\left(N_x^\beta(y), X(x)\right)\right) &\geq X(x) \end{aligned}$$

即 $\overline{SU}_2(\underline{SL}_2(X)) \subseteq X \subseteq \underline{SL}_2(\overline{SU}_2(X))$ 。

注 1 如果 $I = I_M$, $T = T_M$ 则命题 7 的 6) 的条

件可弱化为对于任意 $x \in U, 1 - N_x^\beta(x) \leq X(x) \leq N_x^\beta(x)$ 。

由命题 7 的 2)、6) 及 7) 可得如下推论。

推论 2 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) = 1$, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(\underline{S}L_2(X)) \subseteq \underline{S}L_2(X) \subseteq \overline{S}U_2(\underline{S}L_2(X)) \subseteq X \subseteq \underline{S}L_2(\overline{S}U_2(X)) \subseteq \overline{S}U_2(X) \subseteq \overline{S}U_2(\overline{S}U_2(X))$ 。

类似命题 3, 我们可得到下面的命题。

命题 8 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。如果 $I = I_M, T = T_M$, 则对于任意 $X \in F(U), \alpha \in [0, 1], \underline{S}L_2(X \cup \hat{\alpha}) = \underline{S}L_2(X) \cup \hat{\alpha}, \overline{S}U_2(X \cap \hat{\alpha}) = \overline{S}U_2(X) \cap \hat{\alpha}$ 。

下面的命题讨论 $(\underline{S}L_2, \overline{S}U_2)$ 的对偶性。

命题 9 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。

1) 如果 I 是基于连续的 t -模 T 和对合伪补 \mathcal{N} 的一个 S -蕴涵算子, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(X) = \text{co}_N \overline{S}U_2(\text{co}_N X), \overline{S}U_2(X) = \text{co}_N \underline{S}L_2(\text{co}_N X)$ 。

2) 如果 I 是基于连续的 t -模 T 的一个 R -蕴涵算子, \mathcal{N} 是由 I 诱导的伪补, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(\text{co}_N X) = \text{co}_N \overline{S}U_2(X), \overline{S}U_2(\text{co}_N X) \subseteq \text{co}_N \underline{S}L_2(X)$ 。

证明 1) 类似命题 4 的 1) 的证明。2) 因为对于任意 $a \in [0, 1], N_I(a) = I(a, 0)$ 。则对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 7) 及 13) 可得,

$$\begin{aligned} \underline{S}L_2(\text{co}_N X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), I(X(z), 0)) \right) = \\ &= \bigwedge_{y \in U} \bigwedge_{z \in U} I \left(T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y)), I(X(z), 0) \right) = \\ &= \bigwedge_{y \in U} \bigwedge_{z \in U} I \left(T(T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y)), X(z)), 0 \right) = \\ &= I \left(\bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z)) \right), 0 \right) = \\ &= \mathcal{N} \left(\bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \right) = \\ &= \mathcal{N}(\overline{S}U_2(X)(x)) = \text{co}_N \overline{S}U_2(X)(x) \end{aligned}$$

即对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(\text{co}_N X) = \text{co}_N \overline{S}U_2(X)$ 。另一方面类似命题 4 的 2) 的证明。

下面考虑一些特殊集合的上下近似。

命题 10 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x, y \in U, \alpha \in [0, 1], X \in F(U)$ 。

下列表述成立:

1) 如果 T 是连续的, 则 $\overline{S}U_2(1_y)(x) = \bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_y^\beta(z));$

2) $\underline{S}L_2(1_{U-\{y\}})(x) = \bigwedge_{z \in U} I(N_x^\beta(z), I(N_y^\beta(z), 0));$

3) 如果 T 是连续的, 则 $\overline{S}U_2(1_X)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y),$

$\bigvee_{z \in X} N_z^\beta(y));$

4) $\underline{S}L_2(1_X)(x) = \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \notin X} I(N_z^\beta(y), 0));$

5) $\underline{S}L_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x) = \bigwedge_{z \in U} I(N_x^\beta(z), I(N_y^\beta(z), \alpha))$ 。其中任意 $X, Y \in F(U), x \in U, (X \Rightarrow_I Y)(x) = I(X(x), Y(x))$ 。

命题 11 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。对于任意 $x, y \in U, \alpha \in [0, 1], X \in F(U)$, 下列表述成立:

1) 如果 T 是连续的, 则 $\overline{S}U_2(1_y)(x) = \overline{S}U_2(1_x)(y);$

2) $\underline{S}L_2(1_{U-\{y\}})(x) = \underline{S}L_2(1_{U-\{x\}})(y);$

3) $\underline{S}L_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x) = \underline{S}L_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y)$ 。

证明 由命题 10 及引理 1 的 7) 可证得结论。

在命题 7 的 6) 中, 对于任意 $X \in F(U)$, 我们提出了一个 $\underline{S}L_2(X) \subseteq X \subseteq \overline{S}U_2(X)$ 的充分条件, 下面我们给出相应的充要条件。

命题 12 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(X) \subseteq X$ 或 $X \subseteq \overline{S}U_2(X)$ 当且仅当对于任意 $x \in U, \overline{N}_x^1 \neq \emptyset$ 。

证明:

(充分性) 由公式(2)可知, 如果对于任意 $x \in U, x$ 的 1-邻域 $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, 即对于任意 $x \in U, C_i(x) \geq \beta (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, 存在 $u \in U$, 使得 $C_i(u) = 1$, 则 $N_x^\beta(u) = \bigwedge_{C_i(x) \geq \beta} C_i(u) = 1$ 。从而由引理 1 的 3) 可知,

$$\begin{aligned} \underline{S}L_2(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \leq \\ &= I \left(1, \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(u), X(z)) \right) = \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(u), X(z)) \leq \\ &= I(1, X(x)) = X(x) \\ \overline{S}U_2(X)(x) &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z)) \right) \geq \\ &= T \left(1, \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(u), X(z)) \right) = \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(u), X(z)) \geq \\ &= T(1, X(x)) = X(x) \end{aligned}$$

即对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_2(X) \subseteq X, X \subseteq \overline{S}U_2(X)$ 。

(必要性) 对于任意 $x \in U$, 令 $X = 1_x \in F(U)$, 由命题 10 可知, $1 = 1_x(x) \leq \overline{S}U_2(1_x)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_x^\beta(y))$, 即 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_x^\beta(y)) = 1$ 。则 $\bigvee_{y \in U} N_x^\beta(y) = 1$, 由 x 的 1-邻域的定义可知 $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$ 。

另一方面, 对于任意 $x \in U$, 令 $X = 1_{U-\{x\}} \in F(U)$, 由命题 10 可知, $\underline{S}L_2(1_{U-\{x\}})(x) = \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), I(N_x^\beta(y), 0)) \leq (1_{U-\{x\}})(x) = 0$, 即 $\bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), I(N_x^\beta(y), 0)) = 0$ 。则对于任意 $x \in U$, 存在 $y \in U$, 使得 $N_x^\beta(y) = 1$ 。由 x 的 1-邻域的定义可知 $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$ 。

注 2 由命题 9 的 1) 可知, 如果 I 是基于连续的 t -模 T 和对合伪补 N 的一个 S -蕴涵算子, 则命题 12 的结论均是成立的。

命题 13 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 对于任意 $X \in F(U)$, $\overline{S U_2}(X) \supseteq \overline{S U_2}(\overline{S U_2}(X))$ 或 $\underline{S L_2}(X) \subseteq \underline{S L_2}(\underline{S L_2}(X))$ 当且仅当对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$ 。

证明:

(充分性) 如果对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$ 。则

$$\begin{aligned} \overline{S U_2}(\overline{S U_2}(X))(x) &= \\ \bigvee_{y \in U} T &\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \bigvee_{u \in U} T \left(N_z^\beta(u), \bigvee_{v \in U} T \left(N_v^\beta \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. (u), X(v) \right) \right) \right) \right) = \\ \bigvee_{y \in U} T &\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \bigvee_{u \in U} \bigvee_{v \in U} T \left(T \left(N_u^\beta(z), N_v^\beta \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. (u), X(v) \right) \right) \right) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigvee_{y \in U} \bigvee_{z \in U} T &\left(T \left(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z) \right), \bigvee_{v \in U} T \left(N_v^\beta(z), X(v) \right) \right) \leq \\ \bigvee_{z \in U} T &\left(N_x^\beta(z), \bigvee_{v \in U} T \left(N_v^\beta(z), X(v) \right) \right) = \overline{S U_2}(X)(x) \end{aligned}$$

(必要性) 对于任意 $x \in U$, 令 $X = 1_x \in F(U)$, 由命题 10 可知, $\overline{S U_2}(\overline{S U_2}(1_x))(x) \leq \overline{S U_2}(1_x)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_x^\beta(y))$ 。则

$$\begin{aligned} \overline{S U_2}(\overline{S U_2}(1_x))(x) &= \\ \bigvee_{y \in U} T &\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T \left(N_z^\beta(y), \bigvee_{u \in U} T \left(N_z^\beta(u), N_x^\beta(u) \right) \right) \right) = \\ \bigvee_{y \in U} \bigvee_{z \in U} \bigvee_{u \in U} &T \left(N_x^\beta(y), T \left(N_z^\beta(y), T \left(N_z^\beta(u), N_x^\beta(u) \right) \right) \right) = \\ \bigvee_{u \in U} \bigvee_{z \in U} \bigvee_{y \in U} &T \left(T \left(N_x^\beta(y), T \left(N_z^\beta(y), N_z^\beta(u) \right) \right), N_x^\beta(u) \right) \leq \\ \bigvee_{u \in U} T &\left(N_x^\beta(u), N_x^\beta(u) \right) \end{aligned}$$

又由于 T 是连续的, 从而有 $\bigvee_{z \in U} \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), T(N_z^\beta(y), N_z^\beta(u))) \leq N_x^\beta(u)$ 。

故对于任意 $y, z, u \in U$, $N_z^\beta(y) = N_y^\beta(z)$ 且 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(u)) \leq N_x^\beta(u)$ 。另一方面类似可证。

注 3 由命题 9 的 1) 可知, 如果 I 是基于连续的 t -模 T 和对合伪补 N 的一个 S -蕴涵算子, 则命题 13 也成立。

由命题 12 和命题 13 可得如下推论。

推论 3 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当

I 是 R -蕴涵算子时, 对于任意 $X \in F(U)$, $\overline{S U_2}(X) = \overline{S U_2}(\overline{S U_2}(X))$ 或 $\underline{S L_2}(\underline{S L_2}(X)) = \underline{S L_2}(X)$ 当且仅当对于任意 $x, y \in U$, $\overline{N}_x^1 \neq \emptyset$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$ 。

注 4 由命题 9 的 1) 可知, 如果 I 是基于连续的 t -模 T 和对合伪补 N 的一个 S -蕴涵算子, 则推论 3 也成立。

4 基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙近似算子的比较

本节主要讨论两对基于知识粒生成的 (I, T) -模糊 β -覆盖粗糙近似算子与基于对象生成的 (I, T) -模糊 β -覆盖粗糙近似算子之间的关系, 并给出相关近似算子等价的条件。

定理 2 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, 则对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{S L_2}(X) \subseteq \underline{S L_1}(X) \subseteq X \subseteq \overline{S U_1}(X) \subseteq \overline{S U_2}(X)$ 。

证明 如果对于任意 $x \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, 则由引理 1 的 3) 有

$$\begin{aligned} \underline{S L_2}(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) \leq \\ &I \left(N_x^\beta(x), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \right) = \\ &I \left(1, \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \right) = \\ &\bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \\ \underline{S L_1}(X)(x) &= \bigvee_{y \in U} T \left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(y), X(z) \right) \right) \geq \\ &T \left(N_x^\beta(x), \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \right) = \\ &T \left(1, \bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \right) = \\ &\bigwedge_{z \in U} I \left(N_z^\beta(x), X(z) \right) \end{aligned}$$

即对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{S L_2}(X) \subseteq \underline{S L_1}(X)$ 。

类似可证得 $\overline{S U_1}(X) \subseteq \overline{S U_2}(X)$ 。

又由命题 2 的 5), $\underline{S L_1}(X) \subseteq X \subseteq \overline{S U_1}(X)$ 。

综上所述, 结论成立。

推论 4 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, 则

对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) \subseteq \underline{FL}_2(X) \subseteq \underline{SL}_1(X) \subseteq X \subseteq \overline{SU}_1(X) \subseteq \overline{FU}_2(X) \subseteq \overline{SU}_2(X)$ 。

该推论给出了 $(\underline{SL}_2, \overline{SU}_2)$ 与 $(\underline{FL}_2, \overline{FU}_2)$ 的单方向包含的条件, 下面讨论另一方向包含的条件。

定理 3 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$, 则对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) \supseteq \underline{FL}_2(X)$, $\overline{SU}_2(X) \subseteq \overline{FU}_2(X)$ 。

证明 如果对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$, 则由引理 1 的 7) 及 10) 可得,

$$\begin{aligned} \underline{SL}_2(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z))\right) = \\ &\bigwedge_{z \in U} \bigwedge_{y \in U} I\left(T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(y)), X(z)\right) = \\ &\bigwedge_{z \in U} I\left(\bigvee_{y \in U} T(N_y^\beta(x), N_z^\beta(y)), X(z)\right) \geq \\ &\bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(x), X(z)) = \underline{FL}_2(X)(x) \end{aligned}$$

即对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) \supseteq \underline{FL}_2(X)$ 。

类似可证得 $\overline{SU}_2(X) \subseteq \overline{FU}_2(X)$ 。

由推论 4 和定理 3 可得出下面的推论。

推论 5 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$, 则对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) = \underline{FL}_2(X)$, $\overline{SU}_2(X) = \overline{FU}_2(X)$ 。

为讨论推论 5 的必要性, 给出下面的引理。

引理 3 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。如果 T 是连续的, 则对于任意 $x, y \in U$, $\alpha \in [0, 1]$, 下列表述等价:

- 1) 对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$;
- 2) $\overline{FU}_2(1_x)(y) = \overline{FU}_2(1_y)(x)$;
- 3) $\underline{FL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = \underline{FL}_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x)$ 。

证明: (1) \Leftrightarrow (2): 对于任意 $x, y \in U$, 由 1_x 的定义可知, $1_x(y) = 0 \Leftrightarrow y \neq x$ 。又由于 T 是连续的, 则由引理 1 的 1) 有

$$\begin{aligned} \overline{FU}_2(1_x)(y) &= \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), (1_x)(z)) \\ \left(\bigvee_{z \in U - \{x\}} T(N_z^\beta(y), (1_x)(z))\right) \vee T(N_x^\beta(y), (1_x)(x)) &= \\ T(N_x^\beta(y), 1) &= N_x^\beta(y) \end{aligned}$$

同理可得 $\overline{FU}_2(1_y)(x) = N_y^\beta(x)$ 。故对于任意

$x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x) \Leftrightarrow \overline{FU}_2(1_x)(y) = \overline{FU}_2(1_y)(x)$ 。

(1) \Leftrightarrow (3): 对于任意 $x, y \in U$, $\alpha \in [0, 1]$, 由 $(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y)$ 的定义可知, $(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = 1 \Leftrightarrow y \neq x$ 。又由于对于任意 $\alpha \in [0, 1]$, $I(\alpha, 1) = 1$ 。则

$$\begin{aligned} \underline{FL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) &= \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), (1_x \Rightarrow_I \alpha)(z)) = \\ \left(\bigwedge_{z \in U - \{x\}} I(N_z^\beta(y), (1_x \Rightarrow_I \alpha)(z))\right) \wedge I(N_x^\beta(y), (1_x & \\ \Rightarrow_I \alpha)(x)) &= I(N_x^\beta(y), \alpha) \end{aligned}$$

同理可得 $\underline{FL}_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x) = I(N_y^\beta(x), \alpha)$ 。故对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x) \Leftrightarrow \underline{FL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = \underline{FL}_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x)$ 。

定理 4 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $X \in F(U)$, $\overline{SU}_2(X) = \overline{FU}_2(X)$ 或 $\underline{SL}_2(X) = \underline{FL}_2(X)$, 则对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$ 。

证明: 一方面, 设对于任意 $X \in F(U)$, $\overline{SU}_2(X) = \overline{FU}_2(X)$ 。则对于任意 $x, y \in U$, 由命题 11 的 1) 可知, $\overline{FU}_2(1_x)(y) = \overline{SU}_2(1_x)(y) = \overline{SU}_2(1_y)(x) = \overline{FU}_2(1_y)(x)$ 。又由引理 3 可知对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 。而

$$\begin{aligned} N_y^\beta(x) &= \overline{FU}_2(1_y)(x) = \overline{SU}_2(1_y)(x) = \\ \bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) &= \\ \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(x), N_y^\beta(z)) & \end{aligned}$$

即对于任意 $x, y \in U$, $\bigvee_{z \in U} T(N_y^\beta(z), N_z^\beta(x)) \leq N_y^\beta(x)$ 。

另一方面, 设对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{SL}_2(X) = \underline{FL}_2(X)$ 。则对于任意 $x, y \in U$, 由命题 12 的 3) 可知,

$$\begin{aligned} \underline{FL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) &= \underline{SL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = \\ \underline{SL}_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x) &= \underline{FL}_2(1_y \Rightarrow_I \alpha)(x) \end{aligned}$$

又由引理 3 可得对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 。而由引理 1 的 7) 及 10) 有

$$\begin{aligned} I(N_x^\beta(y), \alpha) &= \underline{FL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = \underline{SL}_2(1_x \Rightarrow_I \alpha)(y) = \\ \bigwedge_{z \in U} I(N_y^\beta(z), I(N_x^\beta(z), \alpha)) &= \\ \bigwedge_{z \in U} I\left(T(N_z^\beta(y), N_x^\beta(z)), \alpha\right) &= \\ I\left(\bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), N_x^\beta(z)), \alpha\right) & \end{aligned}$$

则 $N_x^\beta(y) = \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), N_x^\beta(z))$ 。即对于任意 $x, y \in U$, $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$ 。

下面比较 $(\underline{S}L_1, \overline{S}U_1)$ 与 $(\underline{F}L_2, \overline{F}U_2)$ 的关系。

定理 5 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $x, z \in U, N_x^\beta(x) = 1$ 且 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$, 则对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{S}L_1(X) = \underline{F}L_2(X), \overline{S}U_1(X) = \overline{F}U_2(X)$ 。

证明 由推论 4 可知, 如果对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) = 1$, 则对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_1(X) \supseteq \underline{F}L_2(X), \overline{S}U_1(X) \subseteq \overline{F}U_2(X)$ 。下面只需证明对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_1(X) \subseteq \underline{F}L_2(X), \overline{S}U_1(X) = \overline{F}U_2(X)$ 。

一方面, 对于任意 $x, z \in U$, 如果 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$, 则由引理 1 的 5)、7) 及 10) 有

$$\begin{aligned} \underline{F}L_2(X)(y) &= \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z)) \leq \\ &\bigwedge_{z \in U} I(T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(x)), X(z)) = \\ &I\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(x), X(z))\right) = \\ &I(N_x^\beta(y), \underline{F}L_2(X)(x)) \\ \underline{S}L_1(X)(x) &= \bigvee_{y \in U} T\left(N_x^\beta(y), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y), X(z))\right) = \\ &\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), \underline{F}L_2(X)(y)) \leq \\ &\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), I(N_x^\beta(y), \underline{F}L_2(X)(x))) \leq \\ &\underline{F}L_2(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\underline{S}L_1(X) \subseteq \underline{F}L_2(X)$ 。

另一方面, 对于任意 $x, z \in U$, 如果 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$, 则由引理 1 的 2) 和 5) 可得,

$$\begin{aligned} \overline{F}U_2(X)(y) &= \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z)) \geq \\ &\bigvee_{z \in U} T(T(N_x^\beta(y), N_z^\beta(x)), X(z)) = \\ &T\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(x), X(z))\right) = \\ &T(N_x^\beta(y), \overline{F}U_2(X)(x)) \\ \overline{S}U_1(X)(x) &= \bigwedge_{y \in U} I\left(N_x^\beta(y), \bigvee_{z \in U} T(N_z^\beta(y), X(z))\right) = \\ &\bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), \overline{F}U_2(X)(y)) \geq \\ &\bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), T(N_x^\beta(y), \overline{F}U_2(X)(x))) \geq \\ &\overline{F}U_2(X)(x) \end{aligned}$$

即 $\overline{S}U_1(X) \supseteq \overline{F}U_2(X)$ 。

引理 4 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 对于任意 $X \in F(U), \underline{F}L_2(X) \subseteq X$ 或

$X \subseteq \overline{F}U_2(X)$, 当且仅当对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) = 1$ 。

定理 6 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时, 如果对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_1(X) = \underline{F}L_2(X)$ 或 $\overline{S}U_1(X) = \overline{F}U_2(X)$, 则对于任意 $x, z \in U, N_x^\beta(x) = 1$ 且 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$ 。

证明:

一方面, 设对于任意 $X \in F(U), \underline{S}L_1(X) = \underline{F}L_2(X)$ 。由命题 2 的 5) 可知, $\overline{F}L_2(X) = \overline{S}L_1(X) \subseteq X$ 。又由引理 4 可知对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) = 1$ 。假设存在 $x_0, y_0, z_0 \in U$, 使得 $T(N_{z_0}^\beta(y_0), N_{y_0}^\beta(x_0)) > N_{z_0}^\beta(x_0)$ 。令 $X = M_{x_0}^\beta \in F(U)$, 则由引理 1 的 7) 和 10) 有

$$\begin{aligned} \underline{S}L_1(X)(y_0) &= \bigvee_{x \in U} T\left(N_{y_0}^\beta(x), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(x), M_{x_0}^\beta(z))\right) \geq \\ &T\left(N_{y_0}^\beta(x_0), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(x_0), N_z^\beta(x_0))\right) = \\ &T(N_{y_0}^\beta(x_0), 1) = N_{y_0}^\beta(x_0) \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} I(\underline{S}L_1(X)(y_0), \underline{F}L_2(X)(y_0)) &\leq \\ I\left(N_{y_0}^\beta(x_0), \bigwedge_{z \in U} I(N_z^\beta(y_0), M_{x_0}^\beta(z))\right) &\leq \\ I(N_{y_0}^\beta(x_0), I(N_{z_0}^\beta(y_0), N_{z_0}^\beta(x_0))) &= \\ I(T(N_{y_0}^\beta(x_0), N_{z_0}^\beta(y_0)), N_{z_0}^\beta(x_0)) &< 1 \end{aligned}$$

又由引理 1 的 9) 可知, $\underline{S}L_1(X)(y_0) > \underline{F}L_2(X)(y_0)$,

即 $\underline{S}L_1(X) \neq \underline{F}L_2(X)$ 。矛盾。因此, 对于任意

$x, z \in U, \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$ 。

另一方面, 设对于任意 $X \in F(U), \overline{S}U_1(X) = \overline{F}U_2(X)$ 。则对于任意 $x \in U$, 令 $X = 1_x \in F(U)$, 有 $\overline{F}U_2(1_x)(x) = \bigvee_{y \in U} T(N_y^\beta(x), (1_x)(y)) = T(N_x^\beta(x), 1) = N_x^\beta(x)$ 由命题 5 的 1) 及引理 1 的 9) 可知, $\overline{S}U_1(1_x)(x) = \bigwedge_{y \in U} I(N_x^\beta(y), N_x^\beta(y)) = 1$ 。即对于任意 $x \in U, N_x^\beta(x) = 1$ 。对于任意 $y, z \in U$, 又有 $\overline{F}U_2(1_y)(z) = \bigvee_{x \in U} T(N_x^\beta(z), (1_y)(x)) = T(N_y^\beta(z), 1) = N_y^\beta(z)$ 。

而由命题 5 的 1) 可知

$$\begin{aligned} \overline{S}U_1(1_y)(z) &= \bigwedge_{x \in U} I\left(N_z^\beta(x), \bigvee_{u \in U} T(N_u^\beta(x), (1_y)(u))\right) = \\ &\bigwedge_{x \in U} I(N_z^\beta(x), N_y^\beta(x)) \end{aligned}$$

则 $\bigwedge_{x \in U} I(N_z^\beta(x), N_y^\beta(x)) = N_y^\beta(z)$ 。

从而对于任意 $x \in U$, 由引理 1 的 6) 可知, $N_y^\beta(z) \leq I(N_z^\beta(x), N_y^\beta(x)) \Leftrightarrow T(N_z^\beta(x), N_y^\beta(z)) \leq N_y^\beta(x)$ 。即对于任意 $x, z \in U, \bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$ 。

由以上结论,我们可得到下面的推论。

推论 6 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时,对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{S}L_1(X) = \underline{F}L_2(X)$, $\overline{S}U_1(X) = \overline{F}U_2(X)$ 当且仅当对于任意 $x, z \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$ 且 $\bigvee_{y \in U} T(N_x^\beta(y), N_y^\beta(z)) \leq N_x^\beta(z)$ 。

推论 7 设 (U, C) 是模糊 β -覆盖近似空间。当 I 是 R -蕴涵算子时,如果对于任意 $x, y \in U$, $N_x^\beta(x) = 1$, $N_x^\beta(y) = N_y^\beta(x)$ 且 $\bigvee_{z \in U} T(N_x^\beta(z), N_z^\beta(y)) \leq N_x^\beta(y)$, 则对于任意 $X \in F(U)$, $\underline{S}L_1(X) = \underline{S}L_2(X) = \underline{F}L_2(X)$, $\overline{S}U_1(X) = \overline{S}U_2(X) = \overline{F}U_2(X)$ 。

5 结论

本文通过模糊 β -邻域以及模糊逻辑算子(三角模算子 T 和模糊蕴涵算子 I),提出了两种基于模糊 β -覆盖的 (I, T) -模糊粗糙集模型,详细讨论了模糊粗糙近似算子的基本性质,刻画了基于对象与基于知识粒生成的 (I, T) -模糊 β -覆盖粗糙近似算子之间的关系,并通过分析研究,给出了相关近似算子等价的充要条件。本文从知识粒的角度定义的两种基于模糊 β -覆盖的广义模糊粗糙集模型,可以看作是连接覆盖粗糙集理论和模糊粗糙集理论的桥梁,对以后研究基于覆盖的模糊粗糙集在决策中的应用有一定的帮助。在后续的研究中,将进一步研究基于子系统生成的模糊粗糙近似算子,并尝试探索模糊拓扑与模糊 β -覆盖之间的关系,进而研究近似算子的拓扑结构及其应用。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. *International Journal of Computer & Information Science*, 1982, 11(5): 341 – 356.

[2] DAI J, XU Q. Approximations and uncertainty measures in incomplete information systems[J]. *Information Science*, 2012, 198(1): 62 – 80.

[3] KANEIWA K, KUDO Y. A sequential pattern mining algorithm using rough set theory[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2011, 52(6): 881 – 893.

[4] ZHONG N, YAO Y Y, OHSHIMA M. Peculiarity oriented and multidatabase mining [A]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2003: 952-960.

[5] YAO Y Y. Three-way decision with probabilistic rough sets[J]. *Information Science*, 2010, 180(3): 341 –

353.

[6] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation by dominance relations[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2002, 17(2): 153 – 171.

[7] SLOWINSKI R, VANDERPOOTEN D. A generalized definition of rough approximations based on similarity[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2000, 12(2): 331 – 336.

[8] WU W Z, ZHANG W X. Neighborhood operator systems and approximations[J]. *Information Science*, 2002, 144(1): 201 – 217.

[9] YAO Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. *Information Science*, 1998, 111(1): 239 – 259.

[10] BONIKOWSKI Z, BRYNIARSKI E, SKARDOWSKA U W. Extensions and intentions in the rough set theory[J]. *Information Science*, 1998, 107(1): 149 – 167.

[11] CHEN D G, WANG C Z, HU Q H. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets[J]. *Information Science*, 2007, 177(17): 3500 – 3518.

[12] POMYKALA J A. On definability in the non-deterministic information system[J]. *Bulletin of the Polish Academy of Science: Mathematics*, 1988, 36(3/4): 193 – 210.

[13] YAO Y Y. Rough sets, neighborhood systems, and granular computing [C]//*Proceedings of the 1999 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Edmonton, Canada: IEEE Press, 1999: 1553-1558.

[14] LI T J. Rough approximation operators in covering approximation spaces [C]//*RSCTC 2006, Conference Proceedings, Lecture Notes in Artificial Intelligence*. [S. l.]: Springer, 2006: 174-182.

[15] ZHU W. Topological approaches to covering rough sets[J]. *Information Science*, 2007, 177(6): 1499 – 1508.

[16] ZHU W, WANG F Y. On three types of covering-based rough sets[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2007, 19(8): 1131 – 1144.

[17] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. *International Journal of General Systems*, 1990, 17(1): 191 – 209.

[18] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338 – 353.

[19] LI J T, LEUNG Y, ZHANG W X. Generalized

fuzzy rough approximation operators based on fuzzy covering[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 48(3): 836 – 856.

[20] D'EER L, CORNELIS C. A comprehensive study of fuzzy covering-based rough set models: definitions, properties and interrelationships[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018, 336: 1 – 26.

[21] D'EER L, CORNELIS C, GODO L. Fuzzy neighborhood operators based on fuzzy coverings[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017, 312: 17 – 35.

[22] MA L W. Two fuzzy covering rough set models and their generalizations over fuzzy lattices[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2016, 294: 1 – 17.

[23] YANG B, HU B Q. On some types of fuzzy covering-based rough set[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017, 312: 36 – 65.

[24] ZHANG K, ZHAN J M, WU W Z, et al. Fuzzy β -covering based I, T -fuzzy rough set models and applications to multi-attribute decision-making[J]. *Computers & Indus-*

trial Engineering, 2019, 128: 605 – 621.

[25] RADZIKOWSKA A M, KERRE E. A comprehensive study of fuzzy rough sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 126: 137 – 155.

[26] KLIR G J, YUAN B. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications [M]. Englewood Cliffs; Prentice-Hall, 1995.

[27] ABDEL-HAMID A A, MORSI N N. On the relationship of extended necessity measures to implication operators on the unit interval[J]. *Information Science*, 1995, 82: 129 – 145.

[28] MESIAR R, NAVARA M. Diagonals of continuous triangular norms[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 104: 35 – 41.

[29] LIU G L, ZHU K. The relationship among three types of rough approximation pairs[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 60: 28 – 34.

(编校:叶超)

~~~~~

(上接第 90 页)

[10] LIM B, SON S, KIM H, et al. Enhanced deep residual-networks for single image super-resolution[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [S. l.]: IEEE, 2017: 136 – 144.

[11] KRIZHEVSKY A, SUTSKEVER I, HINTON G. Image Netclassification with deep convolutional neural networks[C]//Proceedings of NIPS. [S. l.]:IEEE,2012: 1097 – 1105.

[12] XIE S, GIRSHICK R, DOLLAR P, et al. Aggregated residual transformations for deep neural networks[C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [S. l.]: IEEE, 2017: 5987 – 5995.

[13] HU J, SHEN L, SUN G. Squeeze-and-excitation networks[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [S. l.]: IEEE,

2018. 7132 – 7141.

[14] JADERBERG M, SIMONYAN K, ZISSERMAN A. Spatial transformer networks[M]//Advances in Neural Information Processing Systems. [S. l.]: [s. n. ], 2015: 2017 – 2025.

[15] WOO S, PARK J, LEE J Y, et al. CBAM: convolutional block attention module[C]//European Conference on Computer Vision. Cham : Springer , 2018: 3 – 19.

[16] WANG Q, WU B, ZHU P, et al. ECA-Net: efficient channel attention for deep convolutional neural networks[C]//IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). [S. l.]: IEEE, 2020: 11531 – 11539.

[17] MISRA D. Mish: A self regularized non-monotonic neural activation function [J/OL]. [2022-02-12]. <https://arxiv.org/abs/1908.08681>.

(编校:叶超)