

毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义和计算公式

曾 庄, 黄天民*, 徐 颖, 赵庆庆

(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 介绍了毕达哥拉斯模糊集的定义; 提出了毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义和计算公式, 在完整地考虑隶属度、非隶属度、犹豫度这 3 个变量的关系之后, 对毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义进行了修改, 提出了改进的毕达哥拉斯模糊熵定义和计算公式; 说明了改进的毕达哥拉斯模糊熵的优势, 并用实例验证了毕达哥拉斯模糊熵计算公式的有效性和科学性。

关键词: 直觉模糊熵; 毕达哥拉斯模糊集; 毕达哥拉斯模糊熵; 隶属度; 非隶属度; 犹豫度

中图分类号: TP18; O159 文献标志码: A 文章编号: 1673-159X(2020)02-0016-06

doi:10.12198/j.issn.1673-159X.3201

The Axiomatic Definition and Calculation Formula of Pythagorean Fuzzy Entropy

ZENG Zhuang, HUANG Tianmin*, XU Ying, ZHAO Qingqing

(College of Mathematics, China Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756 China)

Abstract: Firstly, the definition of Pythagorean fuzzy set is introduced. Then the axiomatization definition and calculation formula of Pythagorean fuzzy entropy are proposed. The relationship among the three variables of membership degree, non-subscription degree and hesitation degree is considered completely. Afterwards, the axiomatization definition of Pythagorean fuzzy entropy is modified, and the improved Pythagorean fuzzy entropy definition and calculation formula are proposed. Finally, the advantages of the improved Pythagoras fuzzy entropy are illustrated, and the validity and scientific nature of the Pythagoras fuzzy entropy formula are verified by an example.

Keywords: intuitive fuzzy entropy; Pythagorean fuzzy set; Pythagorean fuzzy entropy; degree of membership; non-membership degree; hesitancy degree

1965 年, 美国控制论专家 Zadeh^[1] 提出了模糊集(FS)的概念, 将数学的研究范围从精确问题推广到模糊问题。1986 年, Atanassov^[2] 进一步将模糊集拓展到了直觉模糊集。在研究模糊集和直觉模糊集补运算

收稿日期: 2019-03-04

基金项目: 中央高校研究基金“模糊信息处理与信息编码的代数理论”(2682014ZT28)。

第一作者: 曾庄(1994—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为模糊集、优化与决策。

ORCID: 0000-0002-1959-7666 E-mail: 15228150063@163.com.

* 通信作者: 黄天民(1958—), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为模糊控制与智能控制、优化与决策。

ORCID: 0000-0001-9588-0394 E-mail: tmhuang@swjtu.edu.cn.

引用格式: 曾庄, 黄天民, 徐颖, 等. 毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义和计算公式[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2020, 39(2): 16-21.

ZENG Zhuang, HUANG Tianmin, XU Ying, et al. The Axiomatic Definition and Calculation Formula of Pythagorean Fuzzy Entropy[J].

Journal of Xihua University(Natural Science Edition), 2020, 39(2): 16-21.

基础上,2013年,Yager等^[3]将直觉模糊集推广到了毕达哥拉斯模糊集。毕达哥拉斯模糊集比直觉模糊集具有更强的表达模糊现象的能力。

熵是测量不确定信息的一个重要概念。模糊性是不完全信息的一个特征。为了描述模糊集的不确定性和未知性程度,相应的模糊熵理论也迅速发展了起来。1972年,Deluca等^[4]提出了模糊熵的公理化定义。然后Bustince等^[5]进一步给出了直觉模糊熵公理化定义。直觉模糊熵是直觉模糊集理论中一个重要的研究对象,很多文献从不同的角度对其进行了深入研究。2001年,Szmidt等^[6]对直觉模糊熵进行了修改,并给出了直觉模糊熵公式。Ye^[7]在考虑隶属度和非隶属度之间关系的条件下,巧妙地利用三角函数给出了2个直觉模糊熵公式。Burillo等^[8]基于犹豫度定义了直觉模糊熵公式。Vlachos等^[9]提出了直觉模糊熵的另一种度量方法,揭示了模糊集与直觉模糊集的熵概念之间的数学联系。郑婉容等^[10]对已有的直觉模糊熵的公理化定义和公式进行了总结与修改,提出改进的定义,同时利用正弦函数的概念提出了新的公式。随着研究的深入,直觉模糊熵也随即应用到了很多实际问题中。目前,利用直觉模糊熵解决实际问题的研究也越来越多。比如孔韦韦等^[11]提出了基于直觉模糊熵的红外图像预处理方法;赵萌等^[12]利用直觉模糊熵确定了专家权重,以此进行实验和仿真分析;白植铭等^[13]提出了一种基于直觉模糊熵的多目标决策方法;高志海等^[14]利用所提出的区间值直觉模糊熵来求解属性权重信息未知的区间值直觉模糊集的多属性决策问题;王坚强等^[15]提出了直觉模糊熵的直觉语言多准则决策方法。由于毕达哥拉斯模糊集提出的时间不长,关于毕达哥拉斯模糊集的研究还不多。借助于直觉模糊熵的概念,可以给出毕达哥拉斯模糊熵的定义,从而有利于利用毕达哥拉斯模糊熵解决实际决策问题,推动毕达哥拉斯模糊集在现实应用中的发展进步。

因此本文在前面文献的启发下,定义毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义及计算公式,并给出了相应的证明。毕达哥拉斯模糊熵可以刻画毕达哥拉斯模糊集的不确定性程度,并且丰富了毕达哥拉斯模糊集理论。

1 毕达哥拉斯模糊集

定义1^[3] 设 X 为论域,则称三元组 $P = \{ \langle x, u_P(x), v_P(x) \rangle \mid 0 \leq u_P^2(x) + v_P^2(x) \leq 1, x \in X \}$ 为毕达哥拉斯模糊集(PFS),其中 $u_P(x): X \rightarrow [0, 1], v_P(x): X \rightarrow [0, 1]$ 分别表示 X 上元素 x 属于 P 的隶属度和非隶属度,称 $\pi_P(x) = \sqrt{1 - u_P^2(x) - v_P^2(x)}, \pi_P(x) \in [0, 1]$ 为 x 属于 P 的犹豫度。

为了简便,称 $p = (u_p(x), v_p(x))$ 为毕达哥拉斯模糊数(PFN)^[16],记为 $p = (u_p, v_p)$ 。毕达哥拉斯模糊集 P 的补集 P^c 为: $P^c = \{ \langle x, v_P(x), u_P(x) \rangle \mid x \in X \}$ 。

对于毕达哥拉斯模糊集 $P_i = \{ \langle x, u_{P_i}(x), v_{P_i}(x) \rangle \mid x \in X \} (i = 1, 2), P_1 \subseteq P_2$ 当且仅当 $\forall x \in X, u_{P_1}(x) \leq u_{P_2}(x), v_{P_1}(x) \geq v_{P_2}(x)$ 。

毕达哥拉斯模糊集和直觉模糊集都用了隶属度和非隶属度来描述元素属于或不属于集合的程度,但是两者在隶属度和非隶属度方面限制不同。直觉模糊集要求: $0 \leq u_p(x) + v_p(x) \leq 1, \forall x \in X$,而毕达哥拉斯模糊集要求: $0 \leq u_p^2(x) + v_p^2(x) \leq 1, \forall x \in X$ 。

若 $0 \leq u_p(x) + v_p(x) \leq 1$,则一定有 $0 \leq u_p^2(x) + v_p^2(x) \leq 1$,反之却不成立。所以直觉模糊集一定是毕达哥拉斯模糊集,反之不成立。通过对比直觉模糊集与毕达哥拉斯模糊集,可以得到图1。

毕达哥拉斯模糊集是直觉模糊集的推广,使得决策者在决策过程中无需修改直觉模糊决策值也能进行决策。毕达哥拉斯模糊集比直觉模糊集具有更强的刻画模糊现象的能力。

2 毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义及公式

2.1 毕达哥拉斯模糊熵

毕达哥拉斯模糊集^[3]是直觉模糊集^[2]的扩展。研究者在模糊熵^[17]、直觉模糊熵^[6]的基础上,可以定义毕达哥拉斯模糊熵,进而刻画毕达哥拉斯模糊集的不确定性和未知性程度,然后分析讨论毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义。本文提出新的毕达哥拉斯模糊熵公式,并给出了相应的证明。

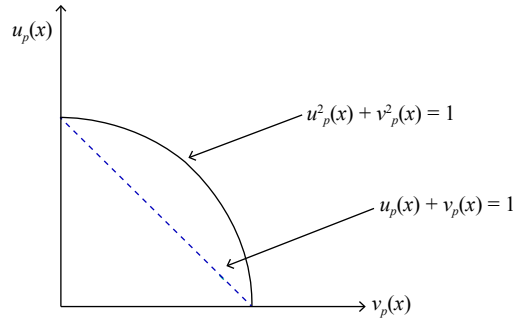


图1 直觉模糊集与毕达哥拉斯模糊集对比

定义 2 $\forall P, B \in PFS(x)$, 设 $F: PFS(x) \rightarrow R^+ (x \in X)$ 为毕达哥拉斯模糊集 $PFS(X)$ 上的毕达哥拉斯模糊熵 F , 并且具有如下性质:

- 1) $F(P) = 0 \Leftrightarrow P$ 为分明集;
- 2) $F(P) = 1 \Leftrightarrow \forall x_i \in X, u_P(x_i) = v_P(x_i)$;
- 3) 若 $P \subseteq B$, 则 $F(P) \leq F(B)$, 即 $\forall x_i \in X$, 当 $u_B(x_i) \leq v_B(x_i)$ 时, 有 $u_P(x_i) \leq u_B(x_i)$ 和 $v_P(x_i) \geq v_B(x_i)$; 或者当 $u_B(x_i) \geq v_B(x_i)$ 时, 有 $u_P(x_i) \geq u_B(x_i)$, $v_P(x_i) \leq v_B(x_i)$;
- 4) $F(P^c)$.

定理 1 设论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P = \{ \langle x, u_P(x), v_P(x) \rangle | 0 \leq u_P^2(x) + v_P^2(x) \leq 1, x \in X \}$ 是 X 上的毕达哥拉斯模糊集, 则定义毕达哥拉斯模糊熵为:

(a) 结合正弦函数得到公式:

$$F_1(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sin \frac{1+u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi + \sin \frac{1-u_P^2(x_i)+v_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) \right\} \quad (1)$$

结合余弦函数得到公式:

$$F_2(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\cos \frac{1+u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi + \cos \frac{1-u_P^2(x_i)+v_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) \right\} \quad (2)$$

$$(b) F_1(P) = F_2(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sqrt{2} \cos \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) \right\} \quad (3)$$

证明: 为了证明式(1)和式(2)是毕达哥拉斯模糊熵, 则需要证明满足公理化定义 2 的 4 个条件。

$$\begin{aligned} \text{不妨令 } F_{1i}(P) &= \left[\sin \frac{1+u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi + \sin \frac{1-u_P^2(x_i)+v_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) \\ F_{2i}(P) &= \left[\cos \frac{1+u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi + \cos \frac{1-u_P^2(x_i)+v_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) = \\ &= \left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{u_P^2(x_i)-v_P^2(x_i)}{4} \pi \right) - 1 \right] \times (\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

$F_{1i}(P) = F_{2i}(P)$, $F_1(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{1i}(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{2i}(P) = F_2(P)$, 从而式(3)即证。

由于 $0 \leq u_P(x_i), v_P(x_i) \leq 1$, 那么可以得到: $-1 \leq u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i) \leq 1$, 从而有 $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)}{4} \pi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \sqrt{2} \cos\left(\frac{u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)}{4} \pi\right) - 1 \leq \sqrt{2} - 1$, 所以 $0 \leq F_{1i}(P), F_{2i}(P) \leq 1$ 。接下来验证满足4个条件:

1) 当毕达哥拉斯模糊集 P 是分明集时, 即 $\forall x_i \in X, u_P(x_i) = 0, v_P(x_i) = 1$ 或者 $u_P(x_i) = 1, v_P(x_i) = 0$ 。无论哪种情形, 都可以得到 $F_{1i}(P) = F_{2i}(P) = 0$, 所以 $F_1(P) = F_2(P) = 0$ 。

2) $\forall x_i \in X, u_P(x_i) = v_P(x_i)$, 有 $F_{1i}(P) = F_{2i}(P) = 1$, 所以 $F_1(P) = F_2(P) = 1$ 。

3) 不妨令 $u_P^2(x_i) = m, v_P^2(x_i) = n$, 其中 $m, n \in [0, 1]$, 所以 $F_{1i}(P) = F_{2i}(P) = f(m, n) = \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{m-n}{4} \pi\right) - 1 \right] \times (\sqrt{2} + 1)$, $f(m, n)$ 分别对变量 m, n 求偏导得到:

$$\frac{\partial f(m, n)}{\partial m} = \frac{(\sqrt{2} + 2)\pi}{4} \sin\left(\frac{n-m}{4} \pi\right) \quad \frac{\partial f(m, n)}{\partial n} = \frac{(\sqrt{2} + 2)\pi}{4} \sin\left(\frac{m-n}{4} \pi\right)$$

为了找到 $f(m, n)$ 的驻点, 分别令 $\frac{\partial f}{\partial m} = 0, \frac{\partial f}{\partial n} = 0$, 得到驻点 $m_{cp} = n$ 。

从而当 $m \leq n$, 有 $\frac{\partial f}{\partial m} \geq 0$; 当 $m \geq n$, 有 $\frac{\partial f}{\partial m} \leq 0$ 。相似的, 当 $m \leq n$, 有 $\frac{\partial f}{\partial n} \leq 0$; 当 $m \geq n$, 有 $\frac{\partial f}{\partial n} \geq 0$ 。即是说当 $m \leq n$ 时, $f(m, n)$ 是关于 $m(n)$ 的增(减)函数, 当 $m \geq n$ 时, $f(m, n)$ 是关于 $m(n)$ 的减(增)函数。

假设有限论域 X 由 2 个不相交的集合 X_1 和 X_2 组成, 且 $X_1 \cup X_2 = X$ 。设对于任意的 $x_i \in X_1, u_P(x_i) \leq u_B(x_i) \leq v_B(x_i) \leq v_P(x_i)$, 然而对于 $x_i \in X_2, u_P(x_i) \geq u_B(x_i) \geq v_B(x_i) \geq v_P(x_i)$, 通过 $f(m, n)$ 的单调性得到, 当 $P \subseteq B$ 时, $F_i(P) \leq F_i(B) (i = 1, 2)$ 。

可以发现对于任意的 $x_i \in X$, 如果 $u_P(x_i)$ 与 $v_P(x_i)$ 越接近, 那么毕达哥拉斯模糊熵越大, 特别当 $u_P(x_i)$ 与 $v_P(x_i)$ 相等时, 毕达哥拉斯模糊熵达到最大, 即 $F_1(P) = F_2(P) = 1$ 。

4) $P^c = \{ \langle x, v_P(x), u_P(x) \rangle \mid x \in X \}$, 所以

$$F_1(P^c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sin \frac{1 + v_P^2(x_i) - u_P^2(x_i)}{4} \pi + \sin \frac{1 - v_P^2(x_i) + u_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2} + 1) \right\} = F_1(P),$$

$$F_2(P^c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\cos \frac{1 + v_P^2(x_i) - u_P^2(x_i)}{4} \pi + \cos \frac{1 - v_P^2(x_i) + u_P^2(x_i)}{4} \pi - 1 \right] \times (\sqrt{2} + 1) \right\} = F_2(P)$$

综上命题得证。

2.2 改进的毕达哥拉斯模糊熵

定义2只考虑了隶属度和非隶属度之间的关系, 忽略了犹豫度这个变量, 在一定程度上可能会丢失模糊信息。因此, 本文在充分考虑隶属度、非隶属度、犹豫度3方面信息的基础上, 得到新的毕达哥拉斯模糊熵公理化定义以及计算公式。

定义3 设 $P = \{ \langle x, u_P(x), v_P(x) \rangle \mid x \in X \}$ 是 X 上的毕达哥拉斯模糊集, 则毕达哥拉斯模糊集的核心定义如下: $S_P(x) = |u_P^2(x) - v_P^2(x)|$, 其中 $S_P(x) \in [0, 1]$, 则称 $S_P(x)$ 为 x 属于 P 的核。

定义4 $\forall P, B \in PFS(X)$, 称映射 $F: PFS(X) \rightarrow R^+ (x \in X)$ 为毕达哥拉斯模糊集上的熵, 并且具有如下性质:

- 1) $F(P) = 0 \Leftrightarrow P$ 为分明集;
- 2) $F(P) = 1 \Leftrightarrow \forall x_i \in X, u_P(x_i) = v_P(x_i)$ 成立;
- 3) $F(P)$ 是关于 $S_P(x) = |u_P^2(x) - v_P^2(x)|$ 的单调减函数, 是关于 $\pi_P(x) = \sqrt{1 - u_P^2(x) - v_P^2(x)}$ 的单调增函数;
- 4) $F(P) = F(P^c)$ 。

性质1) 当毕达哥拉斯模糊集退化成普通集时, 即是明确集。性质2) 当毕达哥拉斯模糊熵为1的充要条件是 $u_P(x)$ 与 $v_P(x)$ 没有差值; 性质3) 毕达哥拉斯模糊熵是核 $S_P(x) = |u_P^2(x) - v_P^2(x)|$ 和犹豫度 $\pi_P(x) = \sqrt{1 - u_P^2(x) - v_P^2(x)}$ 的函数, 即当 $\pi_P(x) = \pi_B(x)$ 且 $S_P(x) \leq S_B(x)$ 时, $F(P) \geq F(B)$; 当 $S_P(x) = S_B(x)$ 且 $\pi_P(x) \leq \pi_B(x)$ 时, $F(P) \leq F(B)$ 。性质4) 说明毕达哥拉斯模糊集 P 与其补集 P^c 模糊程度相同。

定理 2 设论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P = \{ \langle x, u_P(x), v_P(x) \rangle \mid x \in X \}$ 是 X 上的毕达哥拉斯模糊集, 则定义毕达哥拉斯模糊熵:

$$F_3(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

证明: 需要证明式 (4) 满足改进的公理化定义 4 的 4 个条件。不妨令

$$F_{3i}(P) = \sin \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2}$$

由于 $0 \leq u_P^2(x_i) \leq 1$, $0 \leq v_P^2(x_i) \leq 1$, $0 \leq \pi_P^2(x_i) \leq 1$, 那么可以得到: $0 \leq \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \leq 1$, 也即 $0 \leq \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 \leq F_{3i}(P) \leq 1$, 得到 $0 \leq F_3(P) \leq 1$, 接下来验证 4 个条件。

1) 如果 $F_3(P) = 0$, 由于 $0 \leq F_{3i}(P) \leq 1$, 因此得到 $F_{3i}(P) = 0$ 。

由于 $0 \leq \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 得到 $u_P(x_i) = 1, v_P(x_i) = 0$ 或 $u_P(x_i) = 0, v_P(x_i) = 1$, 即 P 为分明集。反过来, 若 P 为分明集时, $\forall x_i \in X$ 有 $u_P(x_i) = 1, v_P(x_i) = 0$ 或 $u_P(x_i) = 0, v_P(x_i) = 1$, 那么 $F_{3i}(P) = 0$ 即 $F_3(P) = 0$ 。

2) $\forall x_i \in X$ 有 $u_P(x_i) = v_P(x_i)$ 。所以 $F_{3i}(P) = 1$, 即 $F_3(P) = 1$ 。反过来, 若 $F_3(P) = 1$, $F_3(P) = \frac{1}{n} F_{3i}(P)$, $0 \leq F_{3i}(P) \leq 1$, 得到 $F_{3i}(P) = 1$ 。由 $0 \leq \frac{1 - |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $u_P(x_i) = v_P(x_i)$ 。

3) 令 $S_P(x) = |u_P^2(x) - v_P^2(x)| = a$, $\pi_P^2(x) = 1 - u_P^2(x) - v_P^2(x) = b$, 满足 $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ 。不妨令 $F_{3i}(P) = f(a, b) = \sin \frac{1 - a + b}{1 + a + b} \times \frac{\pi}{2}$, 分别关于 a, b 求偏导得:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{1 - a + b}{1 + a + b} \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{-2 - 2b}{(1 + a + b)^2} \leq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{1 - a + b}{1 + a + b} \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{2a}{(1 + a + b)^2} \geq 0$$

则 $F_3(P)$ 是关于 $S_P(x) = |u_P^2(x) - v_P^2(x)|$ 的单调减函数, 是关于 $\pi_P^2(x) = 1 - u_P^2(x) - v_P^2(x)$ 的单调增函数。

4) $F_3(P^c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{1 - |v_P^2(x_i) - u_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)}{1 + |v_P^2(x_i) - u_P^2(x_i)| + \pi_P^2(x_i)} \frac{\pi}{2} = F_3(P)$, 综上所述可知结论成立。

现在比较分析毕达哥拉斯模糊熵与改进的毕达哥拉斯模糊熵:

定理 3 设论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P_i = \{ \langle x, u_{P_i}(x), v_{P_i}(x) \rangle \mid x \in X \} (i = 1, 2)$ 是 X 上的任意 2 个不同的毕达哥拉斯模糊集, 当 $u_{P_1}^2(x_i) - v_{P_1}^2(x_i) = u_{P_2}^2(x_i) - v_{P_2}^2(x_i)$ 时, 犹豫度 $\pi_P(x_i) = \sqrt{1 - u_P^2(x_i) - v_P^2(x_i)}$ 越大, 改进的毕达哥拉斯模糊熵 $F_3(P)$ 越大。

证明: 当 $u_{P_1}^2(x_i) - v_{P_1}^2(x_i) = u_{P_2}^2(x_i) - v_{P_2}^2(x_i)$ 时, 通过定理 2 的证明, 可以知道改进的毕达哥拉斯模糊熵 $F_3(P)$ 是关于犹豫度 $\pi_P(x_i)$ 的单调增函数, 从而当 $\pi_{P_1}(x_i) < \pi_{P_2}(x_i)$ 时, 有 $F_3(P_1) < F_3(P_2)$, 所以定理得证。

我们再来分析改进前的毕达哥拉斯模糊熵: 当 $u_{P_1}^2(x_i) - v_{P_1}^2(x_i) = u_{P_2}^2(x_i) - v_{P_2}^2(x_i)$ 时, 由于 $P_1 \neq P_2$, 从而 $\pi_{P_1}^2(x_i) \neq \pi_{P_2}^2(x_i)$, 而此时毕达哥拉斯模糊熵 $F_i(P_1) = F_i(P_2) (i = 1, 2)$, 显然与直观不符。这主要在于改进前的毕达哥拉斯模糊熵没有考虑犹豫度, 使得结果与我们的直观有出入。

该定理说明了改进的毕达哥拉斯模糊熵在考虑了犹豫度之后, 吸收了更多模糊信息, 更符合客观实际。

3 实例分析

通过实例, 用提出的毕达哥拉斯模糊熵公式, 计算毕达哥拉斯模糊熵值。

例 1 分别计算毕达哥拉斯模糊集 $P_1 = \{ \langle x_i, 0.9, 0.3 \rangle \mid x_i \in X \}$, $P_2 = \{ \langle x_i, 0.8, 0.4 \rangle \mid x_i \in X \}$, $P_3 = \{ \langle x_i, 0.7, 0.3 \rangle \mid x_i \in X \}$

$|x_i \in X\}$, $P_4 = \{< x_i, 0.6, 0.3 > | x_i \in X\}$, $P_5 = \{< x_i, 0.3, 0.8 > | x_i \in X\}$, $P_6 = \{< x_i, 0.2, 0.7 > | x_i \in X\}$ 的毕达哥拉斯模糊熵。

1) 利用式(3)计算得:

$$\begin{aligned} F_1(P_1) &= 0.4685, F_1(P_2) = 0.7602, F_1(P_3) = 0.8329, \\ F_1(P_4) &= 0.9235, F_1(P_5) = 0.6864, F_1(P_6) = 0.7890 \\ \therefore F_1(P_1) &< F_1(P_5) < F_1(P_2) < F_1(P_6) < F_1(P_3) < F_1(P_4) \end{aligned}$$

2) 利用式(4)得:

$$\begin{aligned} F_3(P_1) &= 0.3221, F_3(P_2) = 0.6235, F_3(P_3) = 0.7710, \\ F_3(P_4) &= 0.8933, F_3(P_5) = 0.5822, F_3(P_6) = 0.7410 \\ \text{可以得到: } F_1(P_1) &< F_1(P_5) < F_1(P_2) < F_1(P_6) < F_1(P_3) < F_1(P_4) \end{aligned}$$

对上述运算结果进行分析可知: 由于6个毕达哥拉斯模糊集的犹豫度大小排序为: $P_1 < P_2 < P_5 < P_3 < P_6 < P_4$ 。6个毕达哥拉斯模糊集的隶属度和非隶属度之差绝对值大小排序: $P_4 < P_2 = P_3 < P_5 = P_6 < P_1$ 。可以看出 P_4 的犹豫度最大且隶属度和非隶属度最接近, 模糊程度最高, 熵值最大; P_1 的犹豫度最小且隶属度和非隶属度差距最大, 模糊性程度最低, 熵值最小。2种毕达哥拉斯模糊熵得到的结果相同, 与人们的直觉相符。

例2 计算下列毕达哥拉斯模糊集的毕达哥拉斯模糊熵。

$$P_1 = \{< x_i, 0.7, \sqrt{0.4} > | x_i \in X\}, P_2 = \{< x_i, 0.5, 0.4 > | x_i \in X\}$$

1) 利用式(3) 由于 $u_{P_1}^2(x_i) - v_{P_1}^2(x_i) = 0.7^2 - 0.4 = 0.09$, $u_{P_2}^2(x_i) - v_{P_2}^2(x_i) = 0.5^2 - 0.4^2 = 0.09$, 导致 $F_1(P_1) = F_1(P_2)$ 。然而 $\pi_{P_1}^2(x_i) = 0.11$, $\pi_{P_2}^2(x_i) = 0.59$, $\pi_{P_1}(x_i) < \pi_{P_2}(x_i)$ 。可以看出 P_1 与 P_2 的犹豫度相差较大, 而毕达哥拉斯模糊熵却相同, 这显然不符合我们的直观。

2) 用式(4)计算可得 $F_3(P_1) = 0.9723$, $F_3(P_2) = 0.9859$, $F_3(P_1) < F_3(P_2)$ 。

可以发现即使有 $u_{P_1}^2(x_i) - v_{P_1}^2(x_i) = u_{P_2}^2(x_i) - v_{P_2}^2(x_i)$, 但是犹豫度不同, 使得最终的熵值不同, P_2 的犹豫度更大, 模糊程度更高, 熵值也更大; 因此改进的毕达哥拉斯模糊熵考虑了犹豫度这一变量, 吸收了更多的未知信息, 更符合人们的认知。

4 结束语

本文在直觉模糊熵的启发下, 提出了毕达哥拉斯模糊熵的公理化定义, 然后给出了相应的毕达哥拉斯模糊熵的计算公式, 丰富了毕达哥拉斯模糊集理论, 为毕达哥拉斯模糊集的进一步发展和研究奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. [Information and Control](#), 1965, 8(3): 338 – 353.
- [2] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. [Fuzzy Sets and Systems](#), 1986, 20(1): 87 – 96.
- [3] YAGER R R, ABBASOV A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making[J]. [International Journal of Intelligent Systems](#), 2013, 28: 436 – 452.
- [4] DELUCA A, TERMINI S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. [Information and Control](#), 1972(20): 201 – 312.
- [5] BUSTINCE H, BURILLO P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. [Fuzzy Sets and Systems](#), 1996, 79(3): 403 – 405.
- [6] SZMIDT E, KACPRZYK J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. [Fuzzy Sets and Systems](#), 2001, 118(3): 467 – 477.
- [7] YE J. Two effective measure of intuitionistic fuzzy entropy[J]. [Computing](#), 2010, 87(1/2): 55 – 62.

(下转第 70 页)